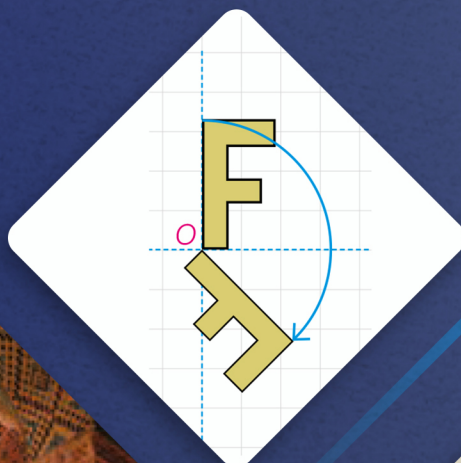


دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۳

هندسه ۲ (رشته ریاضی و فیزیک)



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

گروه
ریاضیسید امیرمحمد سید شاکری
سید امیرمحمد سید شاکری
سید امیرمحمد سید شاکریحسابان و
ریاضی پایهمسئول درس: علیرضا فاطمی
دستیار: مهدی پوررضایی

حسین شفیع زاده • علیرضا فاطمی • سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

مسئول درس: محمد تقی پور
دستیار: هادی کاظم نژادسیدمحسن میراسلامی • امیدرضا پورحسینی • هادی کاظم نژاد
سعید اکبرزادهریاضیات
گسستهمسئول درس: حسین اسدزاده
دستیار: مریم حسینی

سعید اکبرزاده • سوگند روشنی • پرمیدا هادی پور

ریاضی
تجربیمسئول درس: امیرحسین شریفیان
دستیار: امین کبیری

ایمان اردستانی • محمد خان گلدی

ریاضی
انسانیمسئول درس: عباس سعیدی
دستیار: امیرحسین حریریامیدرضا پورحسینی • محمد منتظران • حسین خواجه وند
حسین افسری • مجید یوسف زادهزیست
شناسی

مسئول درس: علی جوهری

امیر کبیری راد • منصوره رئیس دانا • بتول خواجه پور

فیزیک

مسئول درس: مهدی نیکوگفتار

احمد رضوانی • مهرناز طلوع شمس • مریم حیدری
یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

شهرام شاه پرویزی • محمد وحیدی • سبحان دقیق
محمدعلی توسلی فرزمین
شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

فرزانه رجایی • حسن علی محمدی

انسان و
محیط زیست

مسئول درس: شکبیا کریمی

محبوبه کاظمی

سلامت و
بهداشت

مسئول درس: علیرضا رضایی نیا

علیرضا رضایی نیا

گروه
علومسید محمدحسین کشانی
سید محمدحسین کشانی
سید محمدحسین کشانی

طراحان



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

طراحان

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷گروه
عمومیادبیات
فارسیمسئولین درس:
عماد فیض آبادی
محسن ابراهیم تهرانیابوالفضل غلامی • افشین محی الدین • احسان محسنی
عماد فیض آبادی • محسن ابراهیم تهرانیدین و
زندگیمسئولین درس:
علی اکبر آخوندی
زهره محمدیمحمد کریمی • علیرضا دلشاد • علی اکبر آخوندی
زهره محمدی • محبوبه ابتهسامزبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری • سعید ابراهیمی • امین امیدوار

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

فاطمه اکران • گلاویژ جلالی • مینا پژنگ
مهرآوه مجتهدجامعه
شناسیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریفروغ تیموریان • آریتا بیدقی • علیرضا مختاری
الهام میرزایی • آزاده میرزایی • الهام رضاییروان
شناسیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مهدی پارچه باف

زبان
عربیمسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزهاسرافیل قربان پور • محسن احدی • کیارش پورمهدی
امینه کارآمد • زهرا فرزانه

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسبمهسا اصغری • سامان بهری • زهره قموشی
الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرروز یحیی • مهسا اصغری • الهه ریاحی نسب

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری • حسین صادقی • سیاوش خداشناس

اقتصاد

مسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

آیدانا رستمی

هویت
اجتماعیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

رضا کیانپور

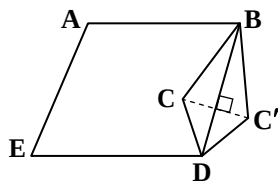
گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷

-۱

الف) نادرست؛ اگر اضلاع متناظر، موازی نباشند، دو مربع مجانس یکدیگر نیستند.

ب) درست؛ در تجانس با نسبت تجانس $k=1$ ، تصویر هر نقطه بر روی خودش منطبق است، پس تبدیل همانی است.

ج) نادرست؛ از تبدیل هندسی بازتاب استفاده می‌کنیم. تصویر نقطه C را تحت بازتاب نسبت به خط BD یافته و آن را به B وصل می‌کنیم.



د) نادرست؛ در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن برابر است با قطر دایره محیطی مثلث یا دو برابر شعاع دایره محیطی مثلث.

-۲

الف) ۱۸۰

در تجانس با نسبت تجانس k ، مساحت k^2 برابر می‌شود، پس:

$$S_1 = \frac{1}{4} \times 4 \times 10 = 20 \Rightarrow S_2 = k^2 \cdot S_1 = 3^2 \times 20 = 180$$

ب) $|k| > 1$

ج) 360° یا 0°

در دوران به مرکز O و زاویه صفر و 360° ، تصویر هر نقطه بر خودش منطبق می‌شود، پس تبدیل همانی است.

$$\frac{8\sqrt{3}}{3} \quad \text{د)}$$

با توجه به اینکه زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع برابر 60° است، طبق قضیه سینوس‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \xrightarrow{\hat{A}=60^\circ, a=8} \frac{8}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

-۳

نکته: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را متجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوئیم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

$$OM' = |k| \cdot OM \quad (2)$$

(۳) اگر $k > 0$ باشد، M و M' یک طرف O قرار می‌گیرند.

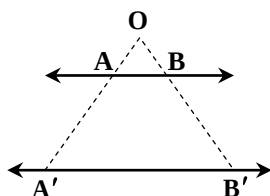
تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K و خط AB را در نظر می‌گیریم. دو حالت اتفاق می‌افتد.

الف) نقطه O روی خط AB است.

در این حالت نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییر نمی‌کند.

ب) نقطه O غیرواقع بر خط AB است.

در این حالت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف تجانس، داریم:



$$\left. \begin{aligned} OA' &= K \cdot OA \Rightarrow k = \frac{OA'}{OA} \\ OB' &= K \cdot OB \Rightarrow k = \frac{OB'}{OB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AB \parallel A'B'$$

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی‌اند و شیب دو خط برابر است.

-۴

الف) اگر بردار انتقال، بردار صفر باشد، تصویر هر نقطه تحت انتقال با بردار صفر بر خودش منطبق می‌شود، پس تبدیل همانی است.

نکته: تبدیل T را تبدیل همانی گوئیم، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

ب) در تجانس غیرهمانی، تصویر مرکز تجانس برخوردش منطبق است، پس مرکز تجانس نقطه ثابت تبدیل است.

نکته: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.

-۵

طبق شکل مقابل، خط ℓ' تصویر خط ℓ تحت تجانس به مرکز O و ضریب تجانس $k > 1$ را رسم می کنیم. راه حل اول:

طبق تعریف تجانس داریم:

$$OA' = K \cdot OA = 3K$$

$$OB' = K \cdot OB = 5K$$

حال مساحت قسمت هاشورزده را یافته و برابر ۶۰ قرار می دهیم.

$$S_{\text{هاشور}} = \frac{1}{2} OA' \cdot OB' - \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 3K \times 5K - \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = \frac{15}{2} (K^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2} (K^2 - 1) = 60 \Rightarrow K^2 - 1 = \frac{120}{15} = 8 \Rightarrow K^2 = 9 \xrightarrow{K > 1} K = 3$$

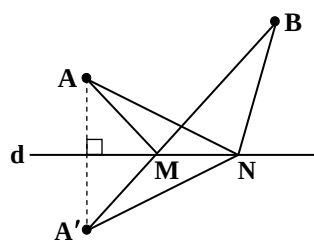
راه حل دوم:

می دانیم در تجانس با نسبت K، مساحت K^2 برابر می شود، پس:

$$S_{OA'B'} = K^2 \cdot S_{OAB}, \quad S_{\text{هاشور}} = S_{OA'B'} - S_{OAB} = K^2 \cdot S_{OAB} - S_{OAB} = (K^2 - 1) S_{OAB}$$

$$\Rightarrow (K^2 - 1) \times \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = 60 \Rightarrow K^2 - 1 = \frac{120}{15} \Rightarrow K^2 - 1 = 8 \Rightarrow K^2 = 9 \xrightarrow{K > 1} K = 3$$

-۶



بازتاب A را نسبت به خط d یافته و A' می نامیم. A' را به B وصل می کنیم تا خط d را در M قطع کند. A را به M وصل می کنیم. $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن است؛ زیرا اگر هر نقطه دلخواه دیگری مانند N را روی خط d در نظر بگیریم، داریم:

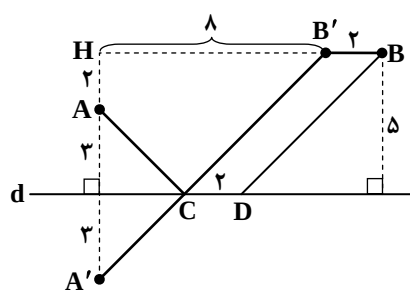
$$AA' \text{ عمود منصف } d \Rightarrow AM = A'M, \quad AN = A'N \quad (1)$$

در مثلث $A'BN$ براساس قضیه نامساوی مثلثی که جمع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است، داریم:

$$A'BN: A'B < A'N + NB \Rightarrow A'M + MB < A'N + NB$$

$$\xrightarrow{(1)} AM + MB < AN + NB$$

-۷



طبق شکل مقابل، ابتدا B را موازی خط d به اندازه ۲ کیلومتر به سمت چپ انتقال می دهیم تا نقطه B' حاصل شود. بازتاب A را نسبت به خط d یافته و A' می نامیم. A' را به B' وصل می کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند. از نقطه C به فاصله ۲ کیلومتر بر روی خط d به سمت راست می رویم تا نقطه D حاصل شود. D را به B وصل می کنیم. مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن است. برای محاسبه اندازه این کوتاه ترین مسیر، داریم:

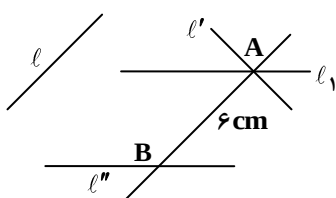
$$\text{طول کوتاه ترین مسیر} = AC + CD + DB = A'C + 2 + CB' = A'C + CB' + 2$$

$$\Rightarrow \text{طول کوتاه ترین مسیر} = A'B' + 2$$

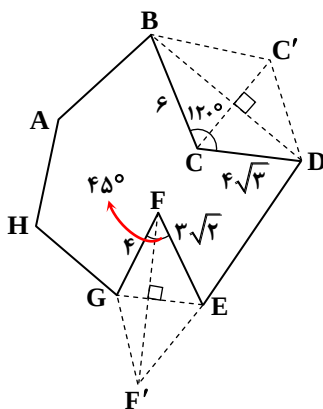
$$A'B'H: A'B'^2 = A'H^2 + HB'^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2 \Rightarrow A'B' = 8\sqrt{2}$$

$$\text{طول کوتاه ترین مسیر} = 8\sqrt{2} + 2$$

-۸



طبق شکل زیر، خط ℓ'' را موازی خط ℓ به اندازه ۶ سانتی متر انتقال می دهیم تا خط ℓ_1 حاصل شود. نقطه تقاطع خط ℓ_1 با ℓ' را نقطه A می نامیم. از A خطی موازی ℓ رسم می کنیم تا خط ℓ'' را در B قطع کند. A تصویر B می باشد و پاره خط $AB = 6$ جواب مسأله است.



طبق شکل، بازتاب نقطه C را نسبت به BD یافته و نقطه C' می‌نامیم. C' را به B و D وصل می‌کنیم. بازتاب F را نسبت به EG یافته و F' می‌نامیم. F' را به E و G وصل می‌کنیم. میزان افزایش مساحت برابر است با:

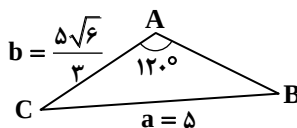
$$\begin{aligned} S &= S_{BCDC'} + S_{EFGF'} \Rightarrow S = 2S_{BCD} + 2S_{EFG} \\ S &= 2 \times \frac{1}{2} CB \cdot CD \cdot \sin 120^\circ + 2 \times \frac{1}{2} FE \cdot FG \sin 45^\circ \\ \Rightarrow S &= CB \cdot CD \cdot \sin 120^\circ + FE \cdot FG \sin 45^\circ \\ \Rightarrow S &= 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 36 + 24 = 60 \end{aligned}$$

نکته (قضیه سینوس‌ها): در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

با توجه به شکل مقابل و استفاده از قضیه سینوس‌ها، داریم:



$$2R = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow 2R = \frac{5}{\sin 120^\circ} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{5}{\sin 120^\circ} = \frac{5\sqrt{6}/3}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{3 \sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3 \sin \hat{B}} \Rightarrow 3 \sin \hat{B} = \frac{5\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{10} = \frac{5\sqrt{18}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

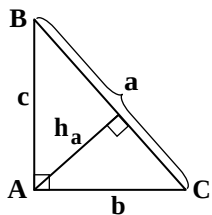
$$\Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \text{ یا } \hat{B} = 135^\circ$$

چون مجموع زوایای مثلث برابر 180° است، پس $\hat{B} = 135^\circ$ غیرقابل قبول است و داریم:

$$\hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ$$

روش اول:

با توجه به شکل مقابل و قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه، داریم:



$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2 c^2} = \left(\frac{a}{bc}\right)^2$$

از طرفی $a \cdot h_a = bc$ ، پس:

$$\left(\frac{a}{bc}\right)^2 = \frac{a^2}{(ah_a)^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

روش دوم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } b^2 c^2} \frac{a^2}{b^2 c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{bc}\right)^2 = \frac{b^2}{b^2 c^2} + \frac{c^2}{b^2 c^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{bc}\right)^2 = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$\xrightarrow{ah_a = bc} \left(\frac{a}{a \cdot h_a}\right)^2 = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

روش سوم:

$$ah_a = bc \Rightarrow a^2 h_a^2 = b^2 c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{h_a^2} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

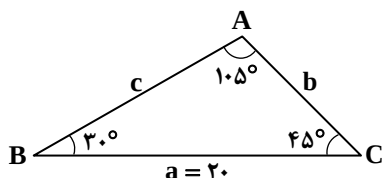
-۱۲

نکته (قضیه سینوس ها): در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

شکل مقابل را در نظر گرفته و از قضیه سینوس ها استفاده می کنیم:



$$\hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{20}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{20}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 2b = \frac{2c}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{10}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \approx 10/4 \\ c = \frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \approx 10/4\sqrt{2} \approx 14/7 \end{cases}$$

-۱۳

نکته: اگر O نقطه ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را متجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوئیم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

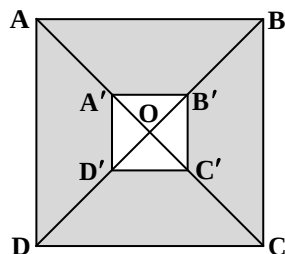
الف) سه نقطه O، M و M' روی یک خط راست باشند.

$$\text{ب) } OM' = |k| \cdot OM$$

پ) اگر $k > 0$ باشد، M و M' یک طرف O قرار می گیرند.

نکته: در تجانس با نسبت k، طول پاره خط، k برابر، محیط شکل، k برابر و مساحت شکل، k^2 برابر می شود.

شکل مقابل را در نظر گرفته و با توجه به نکته، مساحت مربع $A'B'C'D'$ ، $\frac{1}{9}$ مساحت مربع ABCD است، پس داریم:



$$S_{\text{هاشور}} = S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD} - \frac{1}{9}S_{ABCD} \Rightarrow S_{\text{هاشور}} = \frac{8}{9}S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}S_{ABCD} = 32 \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{9 \times 32}{8} = 36 \Rightarrow AB^2 = 36 \Rightarrow AB = 6$$

-۱۴

نکته (قضیه سینوس ها): در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

با استفاده از قضیه سینوس ها در مثلث ABC، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \\ 2 \sin \hat{A} = 2 \sin \hat{B} &\Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{2} \xrightarrow{a=6} \frac{6}{b} = \frac{2}{2} \Rightarrow b = 4$$